

Diferenciabilidad

$$1) \quad \text{Sea } f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-4)y^5}{(x-4)^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (4, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (4, 0) \end{cases}$$

¿Es f diferenciable en $(4, 0)$?

$$2) \quad \text{Sea } f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x||y|}{|x|+|y|} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) ¿Es f continua en $(0, 0)$?

b) ¿Es f diferenciable en $(0, 0)$?

$$3) \quad \text{Sea } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2\sqrt[3]{y}}{x^3+y} & \text{si } x^3 + y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x^3 + y = 0 \end{cases}$$

a) ¿Es f continua en $(0, 0)$?

b) ¿Es f diferenciable en $(0, 0)$?

$$4) \quad \text{Sea } f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-3)(y+3)}{\sqrt{(x-3)^2+(y+3)^2}} & \text{si } (x, y) \neq (3, -3) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (3, -3) \end{cases}$$

a) ¿Es f continua en $(3, -3)$?

b) ¿Es f diferenciable en $(3, -3)$?

$$5) \quad \text{Sea } f(x, y) = \begin{cases} \frac{\text{sen}((x-2)^2(y-1))}{\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}} & \text{si } (x, y) \neq (2, 1) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (2, 1) \end{cases}$$

a) ¿Es f continua en $(2, 1)$?

b) ¿Es f diferenciable en $(2, 1)$?

$$\frac{\partial f}{\partial x}(4,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h,0) - f(4,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(4,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4,h) - f(4,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(4+h,k) - f(4,0) - (\frac{\partial f}{\partial x}(4,0) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(4,0) \cdot k)|}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$: \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|h||k|^5}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|h||k|^5}{(h^2 + k^2)^{3/2}}$$

$$0 \leq \frac{|h||k|^5}{(h^2 + k^2)^{3/2}} \leq \frac{|h||k|^5}{|k|^3} = |h|k^2, \quad k \neq 0$$

$\swarrow \quad \searrow$
 $\rightarrow 0 \leftarrow$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} 0 = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} |h|k^2 = 0$$

Por Teorema de acotamiento, $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|h||k|^5}{(h^2 + k^2)^{3/2}} = 0$

Luego, f es diferenciable en $(4,0)$.

2) a) i) $(0,0) \in \text{Dom } f$

ii) análisis de $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$

$$0 \leq \frac{|x||y|}{|x|+|y|} \leq \frac{|x||y|}{|x|} = |y| \quad ; x \neq 0$$

$\searrow \quad \nearrow$
 0

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |y| = 0$$

Por Teorema de acotamiento: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$

iii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$

$\therefore f$ es continua en $(0,0)$.

$$b) \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(h,k) - f(0,0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \cdot k \right)|}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|h||k|}{\frac{|h|+|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|h||k|}{(|h|+|k|)\sqrt{h^2+k^2}}$$

aproximación a $(0,0)$ mediante familias de rectas
 $k = m \cdot h$

$$\begin{aligned}
 & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| |mh|}{(|h| + |mh|) \sqrt{h^2 + m^2 h^2}} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|m| h^2}{|h| (1 + |m|) \cdot |h| \cdot \sqrt{1 + m^2}} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|m| h^2}{h^2 (1 + |m|) \sqrt{1 + m^2}} = \frac{|m|}{(1 + |m|) \sqrt{1 + m^2}} \quad (\text{depende de } m)
 \end{aligned}$$

luego, no existe el límite

$\therefore f$ no es diferenciable en $(0,0)$

3) a) i) $(0,0) \in \text{Dom } f$

ii) análisis de $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \sqrt[3]{y}}{x^3 + y}$

aproximación a $(0,0)$ mediante familia $y = mx^3, m \neq -1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sqrt[3]{mx^3}}{x^3 + mx^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sqrt[3]{m}}{x^3 (1+m)} = \underbrace{\frac{\sqrt[3]{m}}{1+m}}_{\text{depende de } m}; \quad m \neq -1$$

\therefore no existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$

Por lo tanto, f no es continua en $(0,0)$

b) Como f no es continua en $(0,0)$ entonces f no es diferenciable en $(0,0)$.

1) a) i) $(3, -3) \in \text{Dom } f$

ii) análisis de $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,-3)} f(x,y)$

$$0 \leq \left| \frac{(x-3)(y+3)}{\sqrt{(x-3)^2 + (y+3)^2}} \right| = \frac{|x-3||y+3|}{\sqrt{(x-3)^2 + (y+3)^2}} \leq \frac{|x-3||y+3|}{|x-3|} = |y+3| \quad y \neq -3$$

$\rightarrow 0 \leftarrow$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3,-3)} 0 = \lim_{(x,y) \rightarrow (3,-3)} |y+3| = 0$$

Por Teorema de acotamiento, $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,-3)} f(x,y) = 0$

$$\text{iii) } \lim_{(x,y) \rightarrow (3,-3)} f(x,y) = f(3,-3) = 0$$

Luego, f es continua en $(3,-3)$

$$b) \frac{\partial f}{\partial x}(3,-3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h, -3) - f(3, -3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(3,-3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3, -3+h) - f(3, -3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(3+h, -3+k) - f(3, -3) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(3,-3) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(3,-3) \cdot k \right)|}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|hk|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|h||k|}{h^2 + k^2}$$

aproximación a $(0,0)$ mediante familias de rectas $k = m \cdot h$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| |m \cdot h|}{h^2 + m^2 h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|m| h^2}{h^2 (1 + m^2)} = \frac{|m|}{1 + m^2}$$

depende de m

$$\therefore \text{no existe } \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|h| |k|}{h^2 + k^2}$$

Por lo tanto, f no es diferenciable en $(3, -3)$.

5) a) i) $(2, 1) \in \text{Dom } f$

$$\text{ii) análisis de } \lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{\sin((x-2)^2(y-1))}{\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}}$$

$$0 \leq \left| \frac{\sin((x-2)^2(y-1))}{\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}} \right| \leq \frac{(x-2)^2 |y-1|}{\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}} \leq \frac{(x-2)^2 |y-1|}{|x-2|} = |x-2| |y-1|$$

$x \neq 2$

$\rightarrow 0 \leftarrow$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} 0 = \lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} |x-2| |y-1| = 0$$

por Teorema de acotamiento, $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} f(x,y) = 0$

$$\text{iii) } \lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} f(x,y) = f(2,1) = 0$$

Luego, f es continua en $(2, 1)$

$$b) \frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h,1) - f(2,1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2,1+h) - f(2,1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(2+h,1+k) - f(2,1) - (\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) \cdot k)|}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|\sin(h^2 k)|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|\sin(h^2 k)|}{h^2 + k^2}$$

$$0 \leq \frac{|\sin(h^2 k)|}{h^2 + k^2} \leq \frac{h^2 |k|}{h^2 + k^2} \leq \frac{h^2 |k|}{h^2} = |k| \quad ; \quad h \neq 0$$

$\rightarrow 0 \leftarrow$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} 0 = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} |k| = 0$$

Por Teorema de acotamiento, $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|\sin(h^2 k)|}{h^2 + k^2} = 0$

Pues, f es diferenciable en $(2,1)$.

- Observación: Si se responde primero b), entonces como f es diferenciable en $(2,1)$ se tiene que f es continua en $(2,1)$. Con esto, se tiene la respuesta de a).